

# LEK Stammfunktionen und Integrale

## Definition I.1: Stammfunktion

Jede differenzierbare Funktion  $F$ , für die  $F'(x) = f(x)$  gilt, wird als *Stammfunktion von  $f$*  bezeichnet.

## Definition I.2: Unbestimmtes Integral

Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion  $f$  heißt *unbestimmtes Integral* von  $f$ .

Symbolische Schreibweise:  $\int f(x) dx$

## Potenzregel der Integralrechnung

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$$

## Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

## 1. Aufgabe (18 Min)

Lösen Sie die unbestimmten Integrale

a)  $\int x^6 dx = \frac{1}{7} \cdot x^7 + C$  1BE    b)  $\int 2x^2 dx = \frac{2}{3} \cdot x^3 + C$  1BE

c)  $\int (-3x^2 + 0,5x - \frac{1}{2}) dx = -x^3 + 0,25x^2 - \frac{1}{2}x + C$  3BE

d)  $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{1}{-2} \cdot x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$  2BE

e)  $\int (3,5x^4 - 3x^2 + \frac{1}{4}x) dx = \frac{3,5}{5}x^5 - \frac{3}{3}x^3 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}x^2 + C = 0,7x^5 - x^3 - \frac{1}{8} \cdot x^2 + C =$  3BE

f)  $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + C =$  2BE

12BE

## 2. Aufgabe (18 Min)

Ordnen Sie jeweils einer Funktion  $f$  die passende Stammfunktion zu und begründen Sie die Zuordnung.

f	F
I $8x^3 - 3$	A $x^3 - \frac{3}{2}x^4 - 2$
II $2x - 4$	C $2x^4 - 3x + 2$
III $(x+2)^2$	D $(x-2)^2$
IV $3(x^2 - 2x^3)$	F $x^2 + \frac{1}{x} + C$
V $2x - \frac{1}{x^2}$	E $2x^2 + 4x + \frac{1}{3}x^3 + C$
VI $\frac{x^2-9}{x-3}$	B $\frac{1}{2}x^2 + 3x$

Zuordnung: Nachweis mit  $F'(x) = f(x)$

I zu C weil  $F(x) = 2x^4 - 3x + 2 \Rightarrow F'(x) = 2 \cdot 4x^3 - 3 = 8x^3 - 3 = f(x)$

II zu D weil  $F(x) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow F'(x) = 2 \cdot x - 4 = f(x)$

III zu E weil  $F(x) = 2x^2 + 4x + \frac{1}{3}x^3 + C \Rightarrow F'(x) = 2 \cdot 2x^1 + 4 + \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = 4x + 4 + x^2 = (x+2)^2 = f(x)$

IV zu A weil  $F(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^4 - 2 \Rightarrow F'(x) = 3x^2 - \frac{3 \cdot 4}{2}x^3 = 3x^2 - 6x^3 = 3 \cdot (x^2 - 2x^3) = f(x)$

V zu F weil  $F(x) = x^2 + \frac{1}{x} + C \Rightarrow F'(x) = 2x - 1x^{-2} = 2x - \frac{1}{x^2} = f(x)$

VI zu B weil  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x \Rightarrow F'(x) = x + 3 = \frac{(x+3) \cdot (x-3)}{x-3} = \frac{x^2-9}{x-3} = f(x)$

12BE

### 3. Aufgabe (24 Min)

a) Berechnen Sie das bestimmte Integral  $\int_1^7 (\frac{1}{2}x - 2) dx$

4BE

$$\int_1^7 (\frac{1}{2}x - 2) dx = [\frac{1}{4}x^2 - 2x]_1^7 = (\frac{1}{4} \cdot 7^2 - 2 \cdot 7) - (\frac{1}{4} \cdot 1^2 - 2 \cdot 1) = -\frac{7}{4} - (-\frac{7}{4}) = 0$$

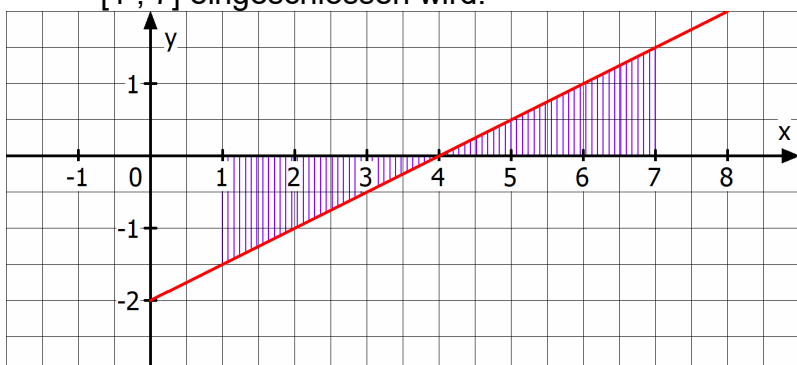
b) Zeichnen Sie den Graphen von  $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$  im Intervall  $[0 ; 8]$

2BE

Zeichnung siehe c).

c) Schraffieren Sie die Fläche, die vom Graphen von  $f$  und der  $x$ -Achse im Intervall  $[1 ; 7]$  eingeschlossen wird.

2BE



d) Erläutern Sie anhand der schraffierten Fläche, warum das Integral im Aufgabenteil a) das gefundene Ergebnis hat.

4BE

Der Funktionsgraph hat im Intervall  $[1 ; 7]$  eine Nullstelle bei  $x = 4$ . Der Graph verläuft im Intervall  $[1 ; 4]$  unterhalb der  $x$ -Achse und im Intervall  $[4 ; 7]$  oberhalb der  $x$ -Achse. Das Ergebnis des Integrals im Intervall  $[1 ; 7]$  ist somit eine Flächenbilanz. Da der Graph

punktsymmetrisch zum Punkt  $(4/0)$  ist, muss das Integral  $\int_1^7 (\frac{1}{2}x - 2) dx$  den Wert Null haben.

e) Berechnen Sie die sichtbar dargestellte Fläche.

4BE

$$\int_1^4 (\frac{1}{2}x - 2) dx = (\frac{1}{4} \cdot 4^2 - 2 \cdot 4) - (\frac{1}{4} \cdot 1^2 - 2 \cdot 1) = -4 - (-\frac{7}{4}) = -\frac{9}{4}$$

$$\int_4^7 (\frac{1}{2}x - 2) dx = (\frac{1}{4} \cdot 7^2 - 2 \cdot 7) - (\frac{1}{4} \cdot 4^2 - 2 \cdot 4) = -\frac{7}{4} - (-4) = \frac{9}{4}$$

Gesuchte Fläche  $A = A_1 + A_2 = |-\frac{9}{4}| + \frac{9}{4} = \frac{18}{4} = 4,5 \text{ FE}$

Es können alternativ auch zwei Dreiecke berechnet werden  $A = 2 \cdot \frac{3 \cdot 1,5}{2} = 4,5 \text{ FE}$

Gesamtbewertung 40BE

Note	1+	1	1-	2+	2	2-	3+	3	3-	4+	4	4-	5+	5	5-	6
Punkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	38	36	34	32	30	28	26	24	22	20	18	16	13	11	8	0
Prozent	≥95	≥90	≥85	≥80	≥75	≥70	≥65	≥60	≥55	≥50	≥45	≥40	≥33	≥27	≥20	0
Anzahl																
Klassendurchschnitt												Bereich	Punkte	Gewichtung	Ergebnis	
<b>Mathematik u. NW</b>												Fachl. Bearbeit.		0,90		
												Form / Sprache		0,10		
												<b>Gesamtpunkte</b>		1		
												Note				